

不可压缩粘弹性有限元法 及其对推进剂药柱应力分析的应用

北京理工大学 王元有* 王新华 胡亚非

【摘要】 由于固体推进剂具有近似不可压缩的特点,利用位移法有限元求解这类材料的力学问题不可能得到满意的结果。本文根据 Herrmann 变分原理导出一种适用于不可压缩和近似不可压缩粘弹性物质的新的本构关系式,介绍了相应有限元公式,并开发了用于平面问题分析的计算机程序 VFAPINP。计算结果表明,本方法和程序可以用于所有泊松比的粘弹性问题的计算,尤其适用于固体推进剂药柱的应力分析。

关键词: 粘弹性 有限元法 推进剂药柱应力分析

1 粘弹性积分型本构关系的新形式

固体推进剂是粘弹性物质,又具有近似不可压缩的特性,利用一般的粘弹性有限元法分析这种近似不可压缩材料,会出现很大误差,甚至无法计算。Herrmann 等人^[1]首先提出处理不可压缩或近似不可压缩弹性问题的方法。本文将他们的方法推广,用于粘弹性,导出一种新的粘弹性积分型的本构关系,给出了相应的有限元方程,并编制用于平面问题分析的计算程序。

利用 Herrmann 提出的变分原理^[2],建立如下弹性问题的本构关系:

$$\sigma_{ij} = 2G(\epsilon_{ij} + \nu H \delta_{ij} - \alpha \theta \delta_{ij}) \quad , \quad \sigma_H = 2G\nu \epsilon_{kk} - (1 - 2\nu)H - 3\alpha\theta \quad (1)$$

根据弹性—粘弹性对应原理^[3,4],由式(1)可以直接获得新的粘弹性问题的本构关系:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t 2G(\xi - \xi') \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau) + \nu H(\tau) \delta_{ij} - \alpha \theta(\tau) \delta_{ij}}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

$$\sigma_H(t) = \int_{-\infty}^t 2\nu G(\xi - \xi') \frac{\partial \epsilon_{kk}(\tau) - (1 - 2\nu)H(\tau) - 3\alpha\theta(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

式中等效时间 ξ 和 ξ' 分别定义如下: $\xi = \xi(t) = \int_{ar} \frac{dt'}{\hat{T}(t')}$, $\xi' = \xi'(t) = \int_{ar} \frac{dt'}{\hat{T}(t')}$ 。而 $ar = 10^{-\frac{C_1(T - T_{ref})}{C_2 - (T - T_{ref})}}$ 为移动因子, C_1 和 C_2 是材料常数,由粘弹性实验获得。 T_{ref} 为粘弹特性主曲线的基准温度。令: $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad H\}^T$, $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}\}^T$ 。则本构关系(2)、(3)式可以统一写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} \{\sigma(t)\} = & [D_1]\{\epsilon(t)\} - 2G(0)\alpha\{\theta(t)\} + \int [D_2]\{\epsilon(\tau)\} \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial \xi} d\xi' \\ & + \int 2\alpha\{\theta(\tau)\} \frac{\partial G(\xi - \xi')}{\partial \xi} d\xi' \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $[D_1] = G(0)$ 对 称

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu \\ & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 & 2\nu \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & -2\nu(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

$$[D_2] = -[D_1]/G(0), \quad \{\Theta(t)\} = \{\Theta(t) \quad \Theta(t) \quad \Theta(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3\Theta(t)\}^T$$

上面本构关系(4)中的2个积分项需要写成便于数值计算的形式。为了减少内存量和计算时间,假设剪切模量 $G(t)$ 可以用 Prony 级数表达: $G(\xi) = G_e + \sum_{i=1}^M G_i e^{-\xi/\tau_i}$ 。

利用 Zak^[4] 提出的数值积分法,上述本构关系(4)可写成如下数值计算式:

$$\begin{aligned} \{\alpha(t_j)\} = & [D_1]\{\epsilon(t_j)\} - 2G(0)\alpha\{\Theta(t_j)\} + (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) [D_2]\{\epsilon^*(t_{j-1})\} \\ & + (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) 2\alpha\{\Theta^*(t_{j-1})\} + [D_2]\left\{\sum_{i=1}^M G_i \alpha_i\right\} + 2\alpha\left\{\sum_{i=1}^M G_i \beta_i\right\} \quad (5) \end{aligned}$$

式中 $\{\alpha_i\}$ 、 $\{\beta_i\}$ 用如下递推公式计算:

$$\begin{aligned} \{\alpha_j\} &= e^{-(\xi_j - \xi_{j-1})/\tau_i} (1 - e^{-(\xi_{j-1} - \xi_{j-2})/\tau_i}) \{\epsilon^*(t_{j-2})\} + e^{-(\xi_j - \xi_{j-1})/\tau_i} \{\alpha_{j-1}\} \\ \{\beta_j\} &= e^{-(\xi_j - \xi_{j-1})/\tau_i} (1 - e^{-(\xi_{j-1} - \xi_{j-2})/\tau_i}) \{\Theta^*(t_{j-2})\} + e^{-(\xi_j - \xi_{j-1})/\tau_i} \{\beta_{j-1}\} \end{aligned}$$

对于 $j = 1, 2$: $\{\alpha_j\} = \{\beta_j\} = \{0\}$ 。式中: $\{\epsilon^*(t_{j-2})\} = (1/2)(\{\epsilon(t_{j-1})\} + \{\epsilon(t_{j-2})\})$, $\{\Theta^*(t_{j-2})\} = (1/2)(\{\Theta(t_{j-1})\} + \{\Theta(t_{j-2})\})$ 。

2 适用于所有泊松比的粘弹性有限元法

设单元有 m 个节点,每单元平均应力函数 H 为常数,则节点广义位移列阵为:

$$\{\delta(t)\} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_m \quad v_m \quad w_m \quad H\}^T \quad (6)$$

单元内任一点位移用节点位移可表示为:

$$\{u(t)\} = \{u \quad v \quad w \quad H\}^T = [N]\{\delta(t)\} \quad (7)$$

单元内任一点的应变用节点位移可表示为:

$$\{e(t)\} = \{e_x \quad e_y \quad e_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad H\}^T = [B]\{\delta(t)\} \quad (8)$$

由式(5)、(8)可知,单元内任一点的应力用节点位移表示为:

$$\begin{aligned} \{\sigma(t_j)\} = & [D_1][B]\{\delta(t_j)\} - 2G(0)\alpha\{\Theta(t_j)\} + (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) [D_2][B]\{\delta(t_{j-1})\} \\ & + (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) 2\alpha\{\Theta^*(t_{j-1})\} + [D_2][B]\left\{\sum_{i=1}^M G_i \alpha_i\right\} + 2\alpha\left\{\sum_{i=1}^M G_i \beta_i\right\} \quad (9) \end{aligned}$$

式中 $\{\alpha_i\}$ 与 $\{\beta_i\}$ 类似,只要用节点位移 $\{\delta^*(t_{j-2})\}$ 代替 $\{\epsilon^*(t_{j-2})\}$ 即得。

对于准静态粘弹性问题,可以忽略粘弹性体的内摩擦引起的能量消耗。于是,任一时刻各单元虚功方程如下:

$$\int_V \{\epsilon^*\}^T \{\sigma(t)\} dV - \int_V \{u^*\}^T \{F_V\} dV - \int_S \{u^*\}^T \{F_S\} dS = 0 \quad (10)$$

式中 $\{\epsilon^*\}$ 、 $\{u^*\}$ 为单元虚应变和虚位移。在此,体积力 $\{F_V\}$ 、面力 $\{F_S\}$ 中增设有一零分量与广义位移的 H 分量相对应。

将式(7)~(9)代入上式(10),经整理,最后得单元刚度方程如下:

$$([K_I] + [K_M])\{\delta(t_j)\} = \{F_T\} + \{F_M\} + \{F_{M1}\} + \{F_{M2}\} \quad j \geq 2 \quad (11)$$

$$[K_I]\{\delta(t_j)\} = \{F_T\} + \{F_M\} \quad j = 1 \quad (12)$$

上式中, $[K_I] = \int [B]^T [D_1] [B] dV$ 为单元弹性刚度矩阵; $[K_M] = \int (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) \frac{1}{2} \cdot [B]^T [D_1] [B] dV$ 为剪切模量 $G(t)$ 的变化引起的单元刚度矩阵修正量; $\{F_T\} = 2G(0)\alpha \int [B]^T \{\theta_{tj}\} dV$ 为热载荷引起的等效单元节点力; $\{F_M\} = \int [N]^T \{F_V\} dV + \int [N]^T \{F_S\} dS$ 为机械载荷引起的等效单元节点力; $\{F_{M1}\} = - \int (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) \frac{1}{2} [B]^T [D_2] [B] \left\{ \sum_{i=1}^M G_i \alpha_i \right\} dV$ 为因 $G(t)$ 变化和记忆效应引起的等效单元节点力; $\{F_{M2}\} = - \int (G(0) - G(\xi_j - \xi_{j-1})) 2\alpha_\beta [B]^T \{\theta^*(t_{j-1})\} dV - \int [B]^T 2\alpha_\beta \left\{ \sum_{i=1}^M G_i \beta_{ij} \right\} dV$ 为因 $G(t)$ 变化和温度记忆效应引起的等效单元节点力。对于弹性材料, $G(t) = G = \text{const.}$, $\nu(t) = \nu = \text{const.}$, 则 $[K_M] = [0]$, $\{F_{M1}\} = \{F_{M2}\} = \{0\}$, 于是, 式(11)退化为经典的弹性有限元法的单元刚度方程, 与式(12)相同。

3 粘弹性有限元程序及其对不可压缩和粘弹性问题计算的有效性

根据上述粘弹性有限元法, 编制了等温平面问题的计算机程序 VFAPINP。它能对二维药柱的应力、应变和位移做详细分析计算, 泊松比不受限制。

为检验本有限元法对于不可压缩和近似不可压缩粘弹性问题计算的有效性, 用 VFAPINP 程序分别计算了厚壁粘弹性圆筒和带弹性薄壳的粘弹性圆筒, 在内压力载荷下的应力和应变, 这两种粘弹性边值问题都有解析解^[5]。

图 1a 列出了带弹性薄壳的粘弹性厚壁圆筒(内半径 $a = 7\text{cm}$, 外半径 $b = 10\text{cm}$, 钢壳厚 $h = 0.1\text{cm}$)受内压力 $P_i = 7\text{MPa}$ 作用下, 在泊松比 $\nu = 0.495$, 时间 $t = 0.1\text{s}$ 时应力解析解、一般粘弹性有限元 VFAP 解和本文介绍的粘弹性有限元 VFAPINP 解。由该图可见: VFAPINP 解与解析解完全吻合, 而 VFAP 解与解析解稍有偏差。

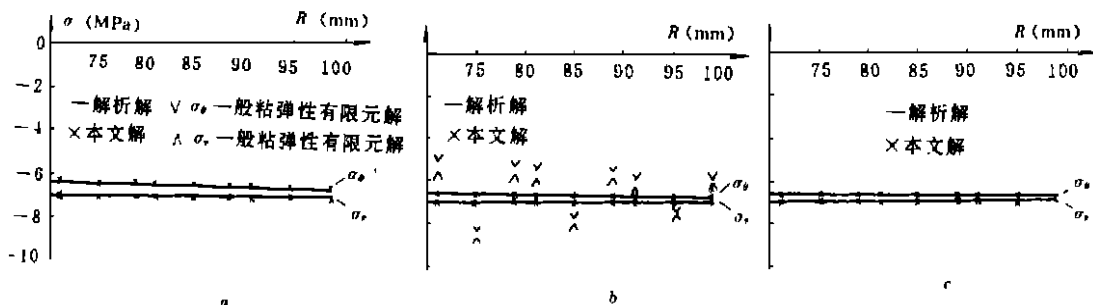


图 1 本文解、一般解与解析解的比较

图 1b 列出了上述圆筒, 在泊松比 $\nu = 0.4995$ (近似不可压缩), 时间 $t = 0.1\text{s}$ 时的解析解、VFAP 解和 VFAPINP 解。由该图可见: 本文 VFAPINP 解与解析解也完全吻合。而一般粘弹

性有限元 VFAP 解出现病态, 与解析解有很大的偏差。

图 1c 列出了该圆筒在泊松比 $\nu = 0.5$ (不可压缩圆筒), 时间 $t = 0.1\text{s}$ 时的解析解和 VFAPINP 解。由图示结果可知: 即使在泊松比 $\nu = 0.5$ 时, VFAPINP 解也与解析解吻合。而一般粘弹性有限元法 VFAP 程序在这种情况下出现奇异, 已无法完成计算。

4 对推进剂药柱应力、应变分析的应用

用 VFAPINP 程序对图 2 所示星孔药柱(半个星角) 在内压力载荷下的应力、应变分析计算。该推进剂在基准温度 $T_{ref} = -40^\circ\text{C}$ 下的拉伸松弛模量 $E(t)$ 主曲线用 Prony 级数表示为:

$$E(t) = E_e + \sum_{i=1}^{15} E_i e^{-t/\tau_i} \text{ (MPa)}$$

其中平衡模量 E_e (MPa)、系数 E_i (MPa) 和松弛时间 τ_i (s) 如下:

$E_1 = -6.01 \times 10^3$, $\tau_1 = 1.58 \times 10^{-10}$; $E_2 = 1.70 \times 10^3$, $\tau_2 = 1.58 \times 10^{-9}$; $E_3 = 1.45 \times 10^3$, $\tau_3 = 1.58 \times 10^{-8}$; $E_4 = 1.98 \times 10^3$, $\tau_4 = 1.58 \times 10^{-7}$; $E_5 = 1.28 \times 10^3$, $\tau_5 = 1.58 \times 10^{-6}$; $E_6 = 5.19 \times 10^2$, $\tau_6 = 1.58 \times 10^{-5}$; $E_7 = 2.03 \times 10^2$, $\tau_7 = 1.58 \times 10^{-4}$; $E_8 = 8.67 \times 10$, $\tau_8 = 1.58 \times 10^{-3}$; $E_9 = 4.78 \times 10$, $\tau_9 = 1.58 \times 10^{-2}$; $E_{10} = 3.02 \times 10$, $\tau_{10} = 1.58 \times 10^{-1}$; $E_{11} = 1.80 \times 10$, $\tau_{11} = 1.58$; $E_{12} = 9.81$, $\tau_{12} = 1.58 \times 10$; $E_{13} = 5.26$, $\tau_{13} = 1.58 \times 10^2$; $E_{14} = 2.96$, $\tau_{14} = 1.58 \times 10^3$; $E_{15} = 7.10 \times 10^{-2}$, $\tau_{15} = 1.58 \times 10^4$; $E_e = 1.84 \times 10$ 。

移动因子 a_T 用 W. L. F. 公式表达, 式中常数 $C_1 = 10.62888$, $C_2 = 129.9515$; 推进剂的泊松比 $\nu = 0.495$ 。壳体材料为钢, 其杨氏模量 $E = 1.952 \times 10^5 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。

发动机内压力按如下规律变化:

$$P = 303.518t \text{ (MPa)} \quad (t \leq 0.04\text{s}), \quad P = 12.140 \text{ (MPa)} \quad (t > 0.04\text{s})$$

图 3a 和 b 分别列出了温度 $T = +50^\circ\text{C}$, 时间 $t = 0.2\text{s}$ 时的主应力 σ_1 等高线和主应变 ϵ_1 在药柱内的分布情况。数值大小是以应力等高线和应变等高线表示的。

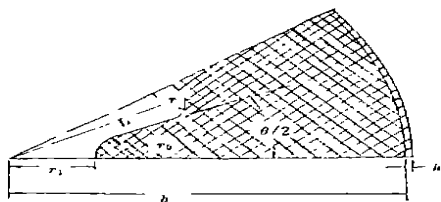
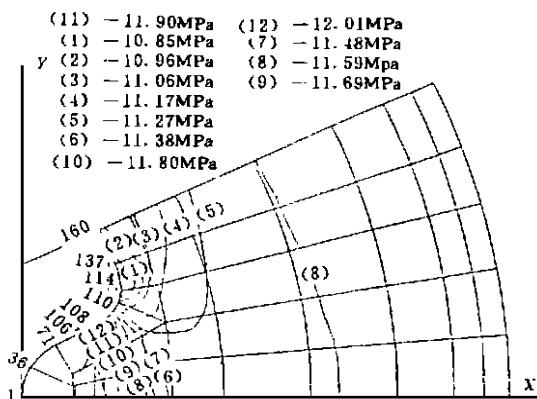
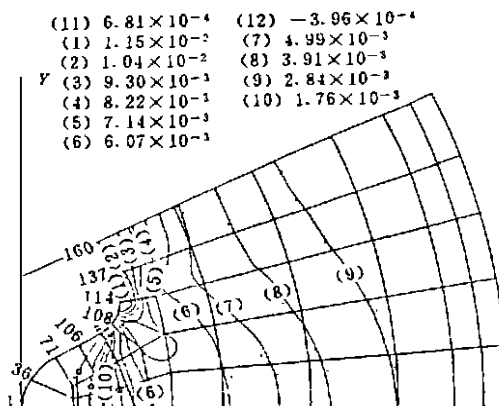


图 2 星孔药柱的半星角



(a)



(b)

图 3 $T = +50^\circ\text{C}$, $t = 0.2\text{s}$ 时, 主应力 σ_1 和主应变 ϵ_1 在药柱内的分布

由图 3a 和 b 可见: (1) 在星槽拐角处, 应力和应变等高线很密, 具有很大的梯度, 可知有应力集中现象。而在星尖和肉腹内应力和应变等高线稀疏, 应力和应变场变化缓慢。(2) 最大应力和最大应变发生在节点 114 处, 最大应力为压缩应力, 而最大应变则为拉伸应变。(3) 整个应力场皆为压缩应力。而应变场是拉伸的, 只有星尖附近因处于三面受压状态出现压缩应变。通常, 推进剂有较高的抗压强度, 而抗拉伸应变能力不高。由本计算结果可知, 推进药柱在内压力载荷作用下的强度分析时, 采用最大拉伸应变作为破坏判据是合理的。

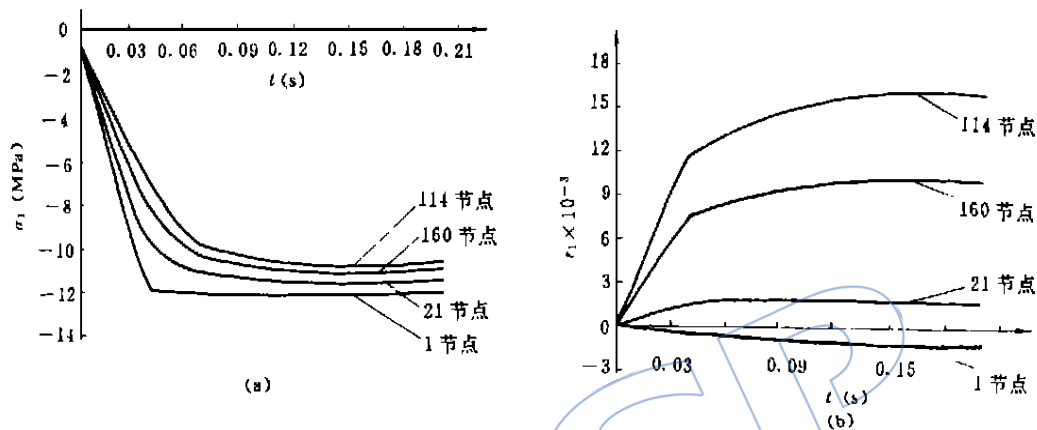


图 4 $T = +50^{\circ}\text{C}$, 特殊点的主应力 σ_1 和主应变 ϵ_1 随时间的变化

图 4a 和 b 分别列出了温度 $T = +50^{\circ}\text{C}$ 时药柱内 4 个特殊节点处的主应力 σ_1 和主应变 ϵ_1 随时间的变化。节点 1 处于星尖; 节点 160 处于星槽底; 节点 21 处于药柱与壳体界面上; 节点 114 为最大应力和最大应变处。

结束语 本文介绍的粘弹性有限元法可以用于所有泊松比 ($0 \leq \nu \leq 0.5$) 下粘弹性问题的计算, 对于不可压缩或近似不可压缩粘弹性问题的计算十分有效, 特别适用于固体推进剂药柱应力、应变的分析计算。本有限元法是以等效时间 ξ 作为时间变量的, 它既可以计算等温粘弹性问题, 也可以计算热粘弹性问题。本粘弹性有限元方程的特例是弹性有限元方程, 因此本有限元法不仅可用于粘弹性问题的分析计算, 也可于弹性问题和弹性—粘弹性复合问题。

参 考 文 献

- 1 Herrmann L R, Toms R M. A Reformulation of the Elastic Field Equations in Terms of Displacements. Valid for All Admissible Values of Poisson's Ratio. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME 1964, 86: 140–141
- 2 Herrmann L R. Elasticity Equations for Incompressible and Nearly-Incompressible Materials by a Variational Theorem. AIAA Journal, 1965, 3: 1896–1900
- 3 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity—An Introduction. 2nd Edition, Academic Press, 1982
- 4 王元有, 苑泽生. 粘弹性力学基础. 北京工业学院, 1987
- 5 王元有. 推进剂药柱在内压力载荷下的应力、应变的粘弹性分析. 兵工学报, 1980, 3: 20–33

AN FEM FOR NEARLY- INCOMPRESSIBLE VISCOELASTICITY AND ITS APPLICATION IN PROPELLANT GRAIN STRESS ANALYSIS

Wang Yuanyou, Wang Xinhua, Hu Yafei

(*Beijing Institute of Technology*)

ABSTRACT

Since solid propellant exhibit nearly-incompressible material behaviour, the displacement formulation of the finite element method is unable to give acceptable solution to mechanical problems of these materials. This paper introduces a new constitutive relation based on Herrmann variational theorem for incompressible and nearly-incompressible viscoelasticity. The corresponding finite element formulation is presented here and a computer program VFAPINP is developed for solution to plane problems. The results show that the approach and the computer program are valid for stress analysis of viscoelastic materials with all admissible values of Poisson's ratio and particularly for the propellant grain stress analysis.

THREE- DIMENSIONAL FLOW FIELD INSIDE COMPRESSOR ROTOR TIP REGION AT NEAR STALL CONDITION

Ma Hongwei, Jiang Haokang, Li Yuchun

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

The three-dimensional flow field inside the tip region of a low speed large-scale axial-flow compressor rotor at near stall condition was measured with the help of a five-hole conical probe driven by a rotating four-coordinate probe traverse mechanism. Results indicate that, radial migration of boundary layer of blade suction surface is strong, which induces a vortex nearby, flow separation appears on the blade suction surface, a blade scraping vortex exists in the corner of the blade pressure surface, strong mixing occurs between boundary layers of the pressure surface and the suction surface at median part of the rotor passage, which leads to substantial deficits of total pressure and axial velocity. All of these forms a complicated flow field in the rotor tip region.

EXPERIMENTAL STUDY ON ENGINE PERFORMANCE AND INTERNAL FLOW FIELD UNDER INLET DISTORTION

Li Wenlan, Huang Zhitao, Hu Zhengfeng

(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

A turbojet engine has been tested under the conditions of a series of screen-induced inflow distortion. Its compressor interstage flow field (static pressure, total pressure and total temperature), inlet distortion transmission, temperature field at turbine outlet and bed-tested engine performance were measured. The measurements indicate that: the inlet total and static pressure distortions are attenuated through the stages, the inlet total pressure distortion induces total temperature distortion at the compressor outlet, the inlet pressure distortion reduces the engine thrust and increases its specific fuel consumption. The tested data reveal also that there exists probably a correlation between temperature distributions at turbine outlet and compressor outlet.